1982 г. | ТРУДЫ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА. | Том. 44

Посвящается памяти
В. М. Алексеева

УДК 513.88

ЭНТРОПИЯ И СЛОЖНОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А. А. Брудно

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Постановка задачи. Классическая теория динамических систем (д.с.) обычно имела дело с потоками, т. е. системами с непрерывным временем. Однако со времени Пуанкаре хорошо известно, что обычно бывает достаточно ограничиться изучением систем с дискретным временем, т. е. не потоков, а отображений. В связи с этим под д.с. (X, T) в работе понимается один из двух объектов:

1. Непрерывное отображение $T: X \to X$ компактного топологического пространства X в себя (топологическая д.с.).

2. Однозначное отображение $T: X \to X$ пространства X, наделенного некоторой σ-алгеброй измеримых множеств, измеримое относительно этой σ-алгебры (метрическая д.с.).

Интерес к проблемам теории динамических систем, особенно возросший в последние 10—20 лет, вызван тем, что результаты и методы этой теории находят непосредственное применение в задачах классической механики, статистической физики и в ряде прикладных дисциплин (в частности, в теории информации). В настоящее время особенно популярно рассмотрение различных характеристик динамической системы, связанных с введенным А. Н. Колмогоровым понятием энтропии [9]. Эту энтропию называют метрической; авторы работы [18] ввели понятие топологической энтропии.

Многие факты энтропийного аспекта теории динамических систем позволяют рассматривать энтропию динамической системы как некоторую меру ее сложности.

С другой стороны, всякая динамическая система состоит из отдельных траекторий, вообще говоря, различной природы и сложности. Так, например, траектории бывают: периодические и блуждающие, рекуррентные, регулярные и т. д. Интуитивно ясно, что глобальная сложность системы (т. е. энтропия) должна быть как-то связана со сложностью ее индивидуальных траекторий.

Для того чтобы придать этому утверждению точный смысл, необходимо в первую очередь дать математически строгое определение понятия «сложность траектории».

В предлагаемой работе* такое определение основано, с одной стороны, на идеях метода символической динамики (классического метода, восходящего еще к Адамару и Морсу), а с другой — использует понятие алгоритмической сложности конечного объекта, введенное А. Н. Колмогоровым в работе [10], посвященной новому обоснованию теории вероятностей и теории информации.

Используя сочетание этих двух понятий, каждой траектории топологической динамической системы сопоставляется неотрицательное действительное число $K(x, T)$, характеризующее степень сложности поведения этой траектории в фазовом пространстве системы.

2. Основные результаты работы. Основные результаты работы состоят в установлении связи между введенным понятием сложности траектории и такими традиционными понятиями теории динамических систем, как метрическая и топологическая энтропия, разложение на эргодические множества и другие. В частности, в работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 3.1. *Для любой эргодической меры* μ *равенство*

$$K(x, T) = h_\mu(T)$$

выполнено для μ — *почти всех* $x \in X$.

Теорема 3.2. *Для любой точки* $x \in X$

$$K(x, T) \leqslant h_T(x).$$

Здесь $h_\mu(T)$ — метрическая энтропия (по мере μ) д.с. (X, T), $h_T(x)$ — энтропия точки по Камае [24] (т. е. $h_T(x) = \sup\limits_{\mu \in V_T(x)} h_\mu(T)$), где $V_T(x)$ — множество индивидуальных мер, отвечающих точке x в рамках теории Крылова—Боголюбова).

В частности, согласно теореме 3.2 сложность любой траектории не превышает топологическую энтропию системы.

3. Исторический обзор. Коротко остановимся на результатах, в той или иной мере связанных с нашей темой. По-видимому, впервые задача такого рода возникла в теории информации и первым результатом в этом направлении был результат Шеннона о сложности кодирования сообщений дискретного эргодического источника. Однако результаты Шеннона, как и некоторые другие, были существенно неполными, прежде всего из-за отсутствия математически строгого определения понятия «сложность сообщения». Такое определение, как уже отмечалось, в терминах теории алгоритмов было дано А. Н. Колмогоровым в 1965 г. В обзорной статье [7] приведено много примеров,

* Краткое изложение некоторых результатов данной работы в несколько других обозначениях содержится в заметке [5].

показывающих плодотворность рассмотрения характеристик типа сложности по Колмогорову для теории вероятностей и теории информации. Кроме того, в этой работе содержится несколько утверждений, связывающих энтропийные и сложностные характеристики в рамках тех же дисциплин. В частности, метод доказательства теоремы 5.1, принадлежащий А. Н. Колмогорову, существенно используется в нашей работе, а анонсированное Л. А. Левиным утверждение 1.5 послужило одним из стимулов появления данной работы и может быть интерпретировано как частный случай ситуации, имеющей место для метрической д.с. общего вида, рассмотренной в [5].

Что же касается собственно теории динамических систем, то в ней рассмотрение различных характеристик и свойств индивидуальных траекторий было всегда чрезвычайно популярно. Достаточно упомянуть такие классические теоремы, как теорема Пуанкаре—Каратеодори о возвращении, эргодическая теорема Биркгофа—Хинчина, теорема Шеннона—Макмиллана—Бреймана и другие. К настоящему времени накопилось известное число различных характеристик индивидуальной траектории, так или иначе связанных со сложностью поведения этой траектории в фазовом пространстве системы. Сравнительный анализ этих характеристик дан в § 4 настоящей статьи, где, в частности, рассмотрен вопрос о взаимосвязи сложности траектории с понятием случайности по Мартин-Лефу, общепринятому в настоящее время.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность $\boxed{\text{В. М. Алексееву}}$ под руководством которого выполнена эта работа. Я также благодарен Е. И. Динабургу, Я. Г. Синаю, А. М. Стёпину, А. Т. Таги-Заде и М. В. Якобсону за полезные замечания.

§ 0. Основные понятия и факты, используемые в работе

1. Как в метрическом, так и в топологическом случае в пространстве X предполагается наличие некоторой σ-алгебры $\mathfrak{M}$, состоящей из измеримых (соответственно борелевских) множеств, инвариантной относительно преобразования T. В множестве $M(X)$ всех нормированных мер, определенных на σ-алгебре $\mathfrak{M}$, обозначим через $M(X, T)$ и $EM(X, T)$ подмножества, образованные инвариантными и эргодическими мерами д.с. (X, T). Следуя [12], будем называть множества $A \in \mathfrak{M}$ множеством инвариантной меры нуль, если $\mu(A)=0$ для любой $\mu \in \in M(X, T)$.

Четверка $(X, \mathfrak{M}, T, \mu)$, где $\mu \in M(X, T)$, определяет динамическую систему в смысле эргодической теории.

В настоящее время имеется известное количество работ обзорного характера, посвященных энтропийному аспекту теории динамических систем; устоялись терминология и обозначения. Поэтому автор считает возможным опустить определения и описание основных свойств привычных энтропийных характеристик (мы будем следовать [20], не делая специальных ссылок) и лишь вкратце коснуться метода символической динамики. Основное внимание будет уделено вопросам, связанным с рассмотрением понятия алгоритмической сложности по Колмогорову, относительно недавно введенного, и не традиционного для теории д.с.

Пусть $\mathfrak{A} = \{A_l\}_{l \in \mathscr{L}}$ — покрытие пространства X,

$$\Lambda_{\mathscr{L}} = \mathscr{L}^{Z^+} = \{\omega = \{\omega(i)\}_{i \in Z^+} : \omega(i) \in \mathscr{L} \text{ для всех } i \in Z^+\},$$

преобразование сдвига $\sigma: \Lambda_{\mathscr{L}} \to \Lambda_{\mathscr{L}}$ определяется условием

$$\tilde{\omega} = \sigma(\omega) \Leftrightarrow \tilde{\omega}(i) = \omega(i+1) \text{ для всех } i \in Z^+.$$

Отображение $\varphi_{\mathfrak{A}}: X \to \Lambda_{\mathscr{L}}$ строится следующим образом:

$$\omega = \{\omega(i)\}_{i \in Z^+} \in \varphi_{\mathfrak{A}}(x) \Leftrightarrow T^i x \in A_{\omega(i)}$$

для всех $i \in Z^+$.

Метод символической динамики в приведенном выше или несколько ином виде использовался многими авторами; особенно подробно он изложен в монографии В. М. Алексеева [1]. В частности, $\sigma(\Omega_{\mathfrak{A}}) \subseteq \Omega_{\mathfrak{A}}$, где $\Omega_{\mathfrak{A}}$ — образ пространства X при отображении $\varphi_{\mathfrak{A}}$, т. е.

$$\Omega_{\mathfrak{A}} = \{\omega \in \Lambda_{\mathscr{L}} : \bigcap_{i \in Z^+} T^{-i} A_{\omega(i)} \neq \varnothing\}.$$

Д.с. $(\Omega_{\mathfrak{A}}, \sigma)$ называется символической моделью д.с. (X, T), отвечающей покрытию $\mathfrak{A}$. Пара (Ω, σ), где Ω — произвольное инвариантное борелевское* подмножество $\Lambda_{\mathscr{L}}$, называется символической динамической системой. В дальнейшем мы будем рассматривать не только элементы $\omega \in \Omega$, но и их конечные отрезки, положив по определению:

$$\omega^{\langle K,N \rangle} = \{\omega(i)\}_{i=K}^{N-1} = \omega(K)\,\omega(K+1)\ldots\omega(N-1);$$

$$\omega^N = \omega^{\langle 0,N \rangle};$$

$$\Omega^N = \{\omega^N : \omega \in \Omega\}.$$

Кроме того, будем обозначать через

$$C(\omega^{\langle K,N \rangle}) = \{\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}(i)\}_{i \in Z^+} : \tilde{\omega}(i) = \omega(i) \text{ при } K \leqslant i \leqslant N-1\}$$

цилиндры в пространстве $\Lambda_{\mathscr{L}}$.

Если разбиение** $\beta = \{B_l\}_{l \in \mathscr{L}}$ измеримо, то аддитивная функция μ, определенная на семействе цилиндров

$$\{C(\omega^{\langle K,N \rangle}) : \omega \in \Lambda_{\mathscr{L}};\ K, N \in Z^+,\ K < N\}$$

соотношением

$$\tilde{\mu}(C(\omega^{\langle K,N \rangle})) = \mu\Big(\bigcap_{i=K}^{N-1} T^{-i} A_{\omega(i)}\Big),$$

может быть продолжена (в силу классической теоремы Колмогорова) до меры μ_β в пространстве $\Lambda_{\mathscr{L}}$. Причем если

$$\mu \in M(X, T)\,(\mu \in EM(X, T)), \text{ то } \mu_\beta \in M(\Lambda_{\mathscr{L}}, \sigma)\,(\mu_\beta \in EM(\Lambda_{\mathscr{L}}, \sigma)).$$

2. Перейдем теперь к описанию понятия алгоритмической сложности конечного объекта. Пусть A — вычислимая функция (алгоритм), определенная на некотором подмножестве пространства всех конечных слов (программ) алфавита $\{0, 1\}$ и принимающая значения в множестве конечных слов s из некоторого конечного алфавита $\mathscr{L}$. Будем обозначать через $l(p)$ длину слова p, т. е. количество букв в нем. Сложность $K_A(s)$ слова s относительно функции A определяется равенством:

---

* Предполагается, что Λ_L наделено тихоновской топологией.

** Покрытие $\mathfrak{A} = \{A_l\}_{l \in \mathscr{L}}$ называется разбиением, если $A_i \cap A_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

$$K_A(s) = \begin{cases} \inf\limits_{p:A(p)=s} l(p), \\ \infty, \text{ если } A(p) \neq s \text{ для всех } p. \end{cases}$$

В работе [10] показано существование такой вычислимой функции B, что для любой другой вычислимой функции A и любого слова s

$$K_B(s) \leqslant K_A(s) + C_A,$$

где C_A — константа, зависящая от A (но не от s).

Такую функцию B будем называть асимптотически отимальной (ас. опт. ф.). В той же работе предложено зафиксировать одну из таких функций и сложность относительно нее обозначать просто $K(s)$.

В предлагаемой работе аналогичная характеристика рассматривается для слов бесконечной длины (последовательностей).

Определение 0.1. *Сложностью последовательности* $\omega = \{\omega(i)\}_{i \in Z^+}$ *назовем число*

$$K(\omega) = \limsup_{n \to \infty} \frac{K(\omega^n)}{n}.$$

Непосредственно из этого определения вытекает простое, но технически важное

Утверждение 0.2. *Для любой вычислимой функции A и любого бесконечного слова* ω

$$K(\omega) \leqslant K_A(\omega);$$

причем если A — ас. опт. ф., то имеет место равенство.

В дальнейшем часто будет использоваться естественное соответствие между словами алфавита $\{0, 1\}$ и целыми числами, вытекающее из двоичного представления последних.

Так, например,

$$\begin{array}{c} 0 \leftrightarrow 0 \\ 1 \leftrightarrow 1 \\ 2 \leftrightarrow 10 \\ 3 \leftrightarrow 11 \\ \vdots \end{array}$$

Если $p = p(1)p(2)\ldots p(k)$, $q = q(1)q(2)\ldots q(l)$ для слова, то будем обозначать через pq и $\bar{p}$ соответственно слова

$$pq = p(1) \ldots p(k)\, q(1) \ldots q(l),$$

$$\bar{p} = p(1)\, p(1) \ldots p(k)\, p(k)\, 01.$$

Последняя запись поможет нам в дальнейшем выделять по отдельности слова p и q из слова $\bar{p}q$.

Верны следующие простые соотношения:

$$l(pq) = l(p) + l(q);$$

$$l(\bar{p}) = 2l(p) + 2;$$

$$\operatorname{card}\{p : l(p) = n\} = 2^n$$

$$\operatorname{card}\{p : l(p) \leqslant r\} \leqslant 2^{[r]+1}.$$

Здесь и далее через $[r]$ обозначена целая часть числа r.

§ 1. Символические динамические системы

На всем протяжении данного параграфа будут рассматриваться символические д.с. (Ω, σ), причем алфавит $\mathscr{L}(\Omega \leqslant \Lambda_{\mathscr{L}})$ предполагается конечным. Основной нашей целью будет доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Если* $\mu \in EM(\Omega, \sigma)$, *то*

$$K(\omega) = h_\mu(\sigma)$$

для μ — *почти всех* $\omega \in \Omega$.

Доказательство этой теоремы разбивается на ряд последовательных лемм. Первая из них хорошо известна.

Лемма 1.2. *Если* $\mathscr{L} = \{1, 2, \ldots, k\}$, $A_i = \{\omega \in \Lambda_{\mathscr{L}} : \omega(0) = i\}$ *и* $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, *то* $h_\mu(\sigma \mid \Omega) = h_\mu(\sigma, \mathfrak{A} \mid \Omega)$ *для любой меры* $\mu \in M(\Omega, \sigma)$.

Аналогично, если (Ω, σ) — *топологическая д.с., то*

$$h(\sigma \mid \Omega) = h(\sigma, \mathfrak{A} \mid \Omega).$$

Лемма 1.3. *Если* $\tilde{\omega} = \sigma^k \omega$ *для некоторого* $k \in Z^+$, *то* $K(\tilde{\omega}) = K(\omega)$.

Доказательство. Пусть A — произвольная ас. опт. ф. Определим вычислимую функцию $A' = A'(p)$, значение которой на словах вида $p = \bar{p}_1 \bar{p}_2 p_3$ получается в три этапа:

1. Выписывается слово $A(p_3)$.

2. Слово p_2 трактуется как число знаков слева, которые надо отбросить в слове $A(p_3)$.

3. Слово $A(p_1)$ приписывается слева к тому, что осталось после выполнения пункта 2.

Полученное слово и примем в качестве $A'(p)$.

Пусть теперь слово p_n таково, что $A(p_n) = \omega^{n+k}$.

Положим $p_1 = 0$, $p_2 = k$ равны числу k и $\tilde{p}_n = \bar{p}_1 \bar{p}_2 p_n$. Тогда $A'(\tilde{p}_n) = \tilde{\omega}^n$ и

$$K_{A'}(\tilde{\omega}^n) \leqslant 2(l(k) + 1) + 6 + K_A(\omega^{n+k}),$$

т. е.

$$K(\tilde{\omega}) \leqslant K_{A'}(\tilde{\omega}) \leqslant \lim_{n \to \infty} \left(\frac{C}{n} + \frac{K_A(\omega^{n+k})}{n+k} \cdot \frac{n+k}{n} \right) \leqslant K_A(\omega) = K(\omega).$$

Обратное неравенство получается аналогично, если положить

$$\tilde{p}_n = \bar{p}_1 \bar{p}_2 p_n, \text{ где } A(p_1) = \omega^k,\ p_2 = 0 \text{ и } A(p_n) = \omega^{n-k}.$$

Лемма 1. (следствие из 1.3), *Множества* $\bar{\bar{A}}_t = \{\omega : K(\omega) = t\}$, $\check{A}_t = \{\omega : K(\omega) < t\}$, $\hat{A}_t = \{\omega : K(\omega) > t\}$ *инвариантны относительно преобразования сдвига* σ.

Лемма 1.5. *Множества* $\bar{\bar{A}}_t$, $\check{A}_t$, $\hat{A}_t$ *измеримы.*

Доказательство. Покажем измеримость множества A_t (для других множеств это делается аналогично). Действительно,

$$\check{A}_t = \{\omega : K(\omega) < t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n > N} \{\omega : K(\omega^n) < (t - 1/k)\, n\}.$$

Но при фиксированных k и n множество в фигурных скобках является объединением конечного числа цилиндров, а значит, измеримо и множество $\breve{A}_t$.

Лемма 1.6. *Если* $\mu\in EM(\Omega,\sigma)$, *то* $K(\omega)\geqslant h_\mu(\sigma)$ *для* μ*-почти всех* $\omega\in\Omega$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть

$$Q=\{\omega: K(\omega)<h_\mu(\sigma)\} \text{ и } \mu Q\neq 0.$$

В силу лемм 1.3 и 1.4 множество Q инвариантно и измеримо; следовательно, $\mu Q=1$ (в силу эргодичности меры μ). Имеет место разложение $Q=\bigcup\limits_{r\in Z^+} Q_r$, где

$$Q_r=\{\omega: K(\omega)<h_\mu(\sigma)-1/r\}.$$

Так как множества Q_r также инвариантны и измеримы и, кроме того,

$$Q_1\subseteq Q_2\subseteq\ldots \text{ и } \bigcup_{r\in Z^+} Q_r=Q,$$

то найдется R такое, что $\mu Q_R=1$. В свою очередь,

$$Q_R=\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{R,k},$$

где $Q_{R,k}=\{\omega: K(\omega^l)<(h_\mu(\sigma)-1/R)\cdot l \text{ для всех } l>k\}$.

Аналогично найдется K такое, что при $k>K$ $\mu Q_{R,k}>1-\delta$ $(\delta>0$, произвольно).

Далее, пусть $\varepsilon<\min(1/R, 1-\delta)$, число $N=N(\varepsilon)$ и множества A_n и B_n удовлетворяют условию хорошо известного следствия теоремы Шеннона—Макмиллана—Бреймана (см., например, [2]). Иными словами, при всех $n>N$ $\Omega=A_n\cup B_n$, причем $\mu(A_n)<\varepsilon$, а для любого $\omega\in B_n$ имеет место соотношение:

$$2^{-n(h_\mu(\sigma)+\varepsilon)}\leqslant\mu(C(\omega^n))\leqslant 2^{-n(h_\mu(\sigma)-\varepsilon)}.$$

Положим

$$Q^A_{R,k}=Q_{R,k}\cap A_k;\quad Q^B_{R,k}=Q_{R,k}\cap B_k.$$

Так как $Q^A_{R,k}\subseteq A_k$, то при всех $k>\max(N(\varepsilon), K)$

$$\mu Q^A_{R,k}\leqslant\mu A_k<\varepsilon \text{ и } \mu Q^B_{R,k}>1-\delta-\varepsilon>0. \tag{$*$}$$

С другой стороны, если $\omega\in Q^B_{R,k}$, то $K(\omega^k)\leqslant k(h_\mu(\sigma)-1/R)$. Следовательно,

$$\operatorname{card}\{\omega^k:\omega\in Q^B_{R,k}\}\leqslant 2^{k(h_\mu(\sigma)-1/R)+1}$$

и

$$\mu(Q^B_{R,k})\leqslant 2^{k(h_\mu(\sigma)-1/R)+1}\cdot 2^{-k(h_\mu(\sigma)-\varepsilon)}\leqslant 2^{k(\varepsilon-1/R)+1}.$$

Значит, $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(Q^B_{R,k})=0$, что противоречит $(*)$. Доказательство закончено.

Лемма 1.7. *Пусть* $\beta=\{B_1,\ldots,B_M\}$ — *конечное измеримое разбиение*; $r, k\in Z^+$.

Положим

$$p_m^{r,k}(\omega, n) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n-r}{k}\right]} \chi_{B_m}(\sigma^{ik+r}\omega)}{\left[\frac{n}{k}\right]},$$

здесь χ_{B_m} — характеристическая функция множества B_m.

Тогда для любого $k \in Z^+$ и любой меры $\mu \in EM(\Omega, \sigma)$ следующие два утверждения одновременно верны для μ-почти всех $\omega \in \Omega$.

а). *Для всех $1 \leqslant m \leqslant M$ существует*

$$p_m^{r,k}(\omega) = \lim_{n\to\infty} p_m^{r,k}(\omega, n).$$

б). *Найдется $r<k$ такое, что*

$$-\sum_{m=1}^{M} p_m^{r,k}(\omega) \log p_m^{r,k}(\omega) \leqslant H_\mu(\beta).$$

Доказательство. Действительно, поскольку $\mu \in EM(\Omega, \sigma)$, то $\mu \in M(\Omega, \sigma^k)$ и справедливость а) вытекает непосредственно из эргодической теоремы Биркгофа—Хинчина. Из этой же теоремы вытекает, что для μ-почти всех $\omega \in \Omega$

$$p_m^{0,1}(\omega) = \mu(B_m) \text{ для всех } 1 \leqslant m \leqslant M.$$

Но тогда справедливость б) для тех же ω следует из выпуклости энтропии и равенства

$$-\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1} p_m^{r,k}(\omega) = p_m^{0,1}(\omega).$$

Лемма 1.8 (очевидная). *Если $t_n = kn+r$ — арифметическая прогрессия, то*

$$K(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{K(\omega^{t_n})}{t_n}.$$

Лемма 1.9. *Если $\mu \in EM(\Omega, \sigma)$, то*

$$K(\omega) \leqslant h_\mu(\sigma)$$

для μ-почти всех $\omega \in \Omega$.

Доказательство. Доказательство использует простую модификацию построения использованного Колмогоровым (см. [7, теорема 5.3]). Будем предполагать, что все слова ω^k ($\omega \in \Omega$, k — произвольно) упорядочены, например лексикографически. Теперь фиксируем некоторое k и произвольное слово ω^n ($n = ik+r$, $r<k$) представляем в виде

$$\omega^n = \omega_0^r \omega_1^k \omega_2^k \dots \omega_i^k.$$

Обозначим через $s_j = s_j(\omega^n)$ число раз, которое j-е из слов множества Ω^k встретилось среди слов $\omega^k{}_s$ ($1 \leqslant s \leqslant i$). Набор чисел $\{s_j = s_j(\omega^n)\}_{j=1}^M$, где $M = \operatorname{card}\{\Omega^k\}$, называется частотным набором слова ω^n. Кроме того, будем обозначать через $h(\omega^n)$ логарифм числа всех слов длины n, имеющих тот же частотный набор, что и ω^n, т. е.

$$h(\omega^n) = \log \frac{i!}{s_1! \ldots s_M!},$$

а через $N(\omega^n)$ — номер ω^n среди этих слов.

Наконец, очевидно, существуют такое $R \in Z^+$ и вычислимая функция $A_0 = A_0(p)$, что $K_{A_0}(\omega^t) < R$ для любого ω, если $t < k$. Тогда слово ω^n однозначно восстанавливается по набору чисел

$$\{k, i, s_1, \ldots, s_M, r, A_0^{-1}(\omega_0^r), N(\omega^n)\} \text{ или}$$

что то же самое, по двоичному слову

$$p = \bar{k}\,\bar{i}\,\bar{s}_1 \ldots \bar{s}_M \bar{r}\, \bar{A}_0^{-1}(\omega_0^r) \log N(\omega^n).$$

Вычислимую функцию A^*, осуществляющую кодирование слова ω^n в слово p, мы назовем функцией частотной кодировки. Таким образом,

$$K_{A^*}(\omega^n) \leqslant 2\left(l(k) + l(i) + \sum_{m=1}^{M} l(s_m) + l(r) + R\right) + h(\omega^n)$$

или, поскольку

$$i = \left[\frac{n}{k}\right] \text{ и } l(s_m) \leqslant l(i) \leqslant [\log i] + 1$$

для всех m, то

$$K_{A^*}(\omega^n) \leqslant h(\omega^n) + o(n).$$

Применяя формулу Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{l}\right)^n (1 + o(1)),$$

получаем

$$h(\omega^n) \leqslant -i \sum_{m=1}^{M} \frac{s_m(\omega^n)}{i} \log\left(\frac{s_m(\omega^n)}{i}\right);$$

в обозначениях леммы 1.7

$$h(\omega^n) \leqslant -i \sum_{m=1}^{M} p_m^{r,k}(\omega, n) \log p_m^{r,k}(\omega, n).$$

Но тогда в силу лемм 1.7 и 1.8 для μ-почти всех ω

$$K(\omega) \leqslant K_{A^*}(\omega) \leqslant \frac{H_\mu(\beta_k)}{k}, \tag{1}$$

где разбиением $\beta_k = \{B_1, \ldots, B_M\}$ является разбиение на всевозможные цилиндры длины k, т. е. $\beta_k = \{C(\omega^k)\}_{\omega \in \Omega}$. Справедливость леммы 1.9 теперь легко выводится из произвольности k в неравенстве (1) и леммы 1.2; ее доказательство закончено полностью.

Теорема 1.1 очевидным образом вытекает из лемм 1.6 и 1.9.

Утверждение теоремы 1.1, помимо самостоятельного интереса, в сочетании с известными фактами энтропийной теории д.с. позволяет ответить на ряд вопросов, оставшихся открытыми при чисто топологическом рассмотрении символических д.с.

Утверждение 1.10. *Ранее автором было показано (см. теорему 5.4* [1]), *что для любого* $\omega\in\Omega$

$$K(\omega)\leqslant H(\omega)\leqslant h(\sigma\,|\,\Omega),$$

где $H(\omega)$ — *комбинаторная энтропия* ω. *Если теперь* μ_M — *мера максимальной энтропии (такая всегда существует для символической д.с.), то для* μ_M*-почти всех* $\omega\in\Omega$

$$K(\omega)=H(\omega)=h(\sigma\,|\,\Omega).$$

Утверждение 1.11. *Существуют минимальные д.с., для которых*

$$K(\omega)\neq\text{const}.$$

Справедливость этого утверждения следует из факта существования минимальных д.с. (для них $H(\omega)\equiv h(\sigma|\Omega)$), допускающих инвариантные меры с разной энтропией (см. [20]) и утверждения теоремы 1.1.

Дальнейшее развитие этих вопросов можно найти в § 4 данной статьи.

Представляется интересным вопрос конструктивного описания последовательностей со сложностью, не превышающей величину энтропии. Ответ на этот вопрос в ограничениях, принятых в теории информации, дается в утверждении 1.12. Отметим, что его доказательство является «переводом» на язык сложности доказательства классического результата Шеннона (см. [15, теорема 4]).

Утверждение 1.12. *Если* $\mu\in EM(\Omega,\sigma)$ — *вычислимая мера (см. определение в* [7]) *и* ω_0 *«удовлетворяет» теореме Шеннона—Макмиллана—Бреймана, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}-(1/n)\log\mu\,(C\,(\omega_0^n))=h_\mu(\sigma),$$

то $K(\omega_0)\leqslant h_\mu(\sigma)$.

Доказательство. Пусть функция $A=A(p)$ определена на словах $p=\bar{p}_1p_2$ так, что если $p_1=n$, $p_2=k$, то $A(p)=\tilde{\omega}^n$ тогда и только тогда, когда цилиндр $C(\tilde{\omega}^n)$ имеет номер k среди всех цилиндров $C(\omega^n)$, упорядоченных (по убыванию) в соответствии с их мерами. Отметим, что вычислимость функции A вытекает из вычислимости меры μ. Пусть $K(\omega_0)>h'>h_\mu(\sigma)$. Тогда так как $K_A(\omega_0)\geqslant K(\omega_0)$, то существует последовательность $\{n_i\}_{i\in Z^+}$ такая, что для всех n_i

$$K_A\,(\omega_0^{n_i})>n_ih'.$$

Поскольку

$$K_A\,(\omega_0^{n_i})\leqslant 2\log n_i+\log\,(NM\,(\omega_0^{n_i})),$$

где $NM\,(\omega_0^{n_i})$ — номер цилиндра $C(\omega_0^{n_i})$ в соответствии с его мерой, то

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\log\,(NM(\omega_0^{n_i}))}{n_i}>h'.$$

Обозначим

$$\Phi\,(\omega_0^{n_i})=\{\omega^{n_i}:NM\,(\omega^{n_i})<NM\,(\omega_0^{n_i})\}$$

и положим

$$S_{n_i}=\sum_{\omega^{n_i}\in\Phi(\omega_0^{n_i})}\mu(C(\omega^{n_i})).$$

Ввиду нормированности меры μ имеем $\mu(S_{n_i})\leqslant 1$ для всех $i\in Z^+$.

С другой стороны,

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\log S_{n_i}}{n_i}\geqslant\lim_{i\to\infty}\frac{\log([2^{n_i h'}]\cdot\mu(C(\omega_0^{n_i})))}{n_i}\geqslant h'-h_\mu(\sigma)>0.$$

Доказательство утверждения 1.12 закончено.

§ 2. Свойства величины K(x, T|𝔄) — сложности траектории точки x относительно покрытия | 𝔄

В данном параграфе для произвольной д.с. вводится и исследуется понятие сложности траектории относительно покрытия. Отметим, что результаты этого параграфа, помимо вспомогательного характера (они существенно используются в § 3 — основном разделе данной работы), представляют и самостоятельный интерес, позволяя, в частности, оценить сложность классических штурмовских траекторий Хедлунда—Морса.

Определение 2.1. *Пусть* $\mathfrak{A}=\{A_1,\dots,A_k\}$ — *конечное покрытие X. Величину*

$$K(x,T\,|\,\mathfrak{A})=\limsup_{n\to\infty}(1/n)\min_{\omega\in\varphi_{\mathfrak{A}}(x)}K(\omega^n)$$

будем называть сложностью траектории точки $x\in X$ *относительно покрытия* $\mathfrak{A}$.

Величина $K(x,T|\,\mathfrak{A})$ обладает следующими энтропийными свойствами:

2.2. $K(x,T\,|\,\mathfrak{A}_1)\leqslant K(x,T,\mathfrak{A}_2)$, *если* $\mathfrak{A}_2\geqslant\mathfrak{A}_1$.

2.3. $K(x,T\,|\,\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2)\leqslant K(x,T\,|\,\mathfrak{A}_1)+K(x,T\,|\,\mathfrak{A}_2)$.

2.4. $K(x,T\,|\,\mathfrak{A}^k)=K(x,T\,|\,\mathfrak{A})$ *для любого* $k\in Z^+$.

Докажем свойство 2.2 (доказательство других свойств аналогично).

Пусть $\mathfrak{A}_1=\{A_1,\dots,A_k\}$, $\mathfrak{A}_2=\{A_1',\dots,A_l'\}$ и $\mathfrak{A}_1\leqslant\mathfrak{A}_2$.

Очевидно, существует вычислимая функция $A_0:\{1,\dots,l\}\to\{1,\dots,k\}$ такая, что если $A_0(j)=i$, то $A'_j\leqslant A_i$. Если теперь A — произвольная ас. опт. ф., то $\tilde{A}=A_0\cdot A$ вычислима и, кроме того, если $A(p)\in\{(\varphi_{\mathfrak{A}_2}(x))^n\}$, то $\tilde{A}\{p\}\in\in\{(\varphi_{\mathfrak{A}_1}(x))^n\}$. Отсюда в силу произвольности n получаем свойство 2.2.

Простым, но чрезвычайно полезным является

Утверждение 2.5. $K(x,T\,|\,\mathfrak{A})\leqslant\inf\limits_{\omega\in\varphi_{\mathfrak{A}}(x)}K(\omega)$; *в частности, если* $\mathfrak{A}$ — *разбиение, то* $K(x,T|\;(\mathfrak{A})=K(\varphi_{\mathfrak{A}}(x))$.

Подобно тому, как для почти всех последовательностей символической д.с. их сложность совпадала с энтропией, для сложности траектории относительно разбиения имеет место

Лемма 2.6. *Пусть β — конечное измеримое разбиение и $\mu \in EM(X, T)$, тогда для μ-почти всех $x \in X$*

$$K(x, T \mid \beta) = h_\mu(T, \beta).$$

Доказательство. Как уже было указано в § 0, если $\mu \in EM(X, T)$, то $\mu \in EM(\Omega_\beta, \sigma)$; хорошо известно, что при этом $h_\mu(T, \beta) = h_{\mu_\beta}(\sigma \mid \Omega_\beta)$. Но в силу теоремы 1.1

$$\mu(Q_\beta = \{\omega \in \Omega_\beta : K(\omega) = h_\mu(T, \beta)\}) = 1.$$

Положим $Q = \varphi_\beta^{-1}(Q_\beta)$. Для $x \in Q$ имеем

$$K(x, T \mid \beta) = K(\varphi_\beta(x)) = h_\mu(T, \beta).$$

Следовательно, $\mu Q = \mu_\beta Q_\beta = 1$. Доказательство закончено.

Следствие 2.7. *Если $\mu \in EM(X, T)$ и разбиение β — образующее для меры μ, то для μ-почти всех $x \in X$*

$$K(x, T \mid \beta) = h_\mu(T);$$

а для любого разбиения β множество

$$Q = \{x : K(x, T \mid \beta) > \sup_{\mu \in M(X,T)} h_\mu(T)\}$$

имеет инвариантную меру нуль.

На протяжении оставшейся части § 2 исследуется величина

$$\sup_{x \in X} K(x, T \mid \mathfrak{A}).$$

Первое из утверждений, относящихся к этому кругу вопросов, выглядит несколько неожиданным.

Утверждение 2.8. *Для любой непериодической точки $x_0 \in X$ и любого числа $N \in Z^+$ существует конечное измеримое разбиение β такое, что*

$$K(x_0, T \mid \beta) = \log N.$$

Доказательство. Пусть $\omega_0 \in \Lambda_{N=\{0,1,\ldots,N-1\}}$ и $K(\omega_0) = \log N$ (таких последовательностей — множество полной меры в силу теоремы 1.1). Для каждого i $(0 \leqslant i \leqslant N-1)$ образуем множество

$$B_i = \{x \in X : \text{существует } k \in Z^+ \text{ такое, что } T^k x_0 = x \text{ и } \omega_0(k) = i\}$$

и положим $\quad B_N = X \setminus \bigcup_{i=0}^{N-1} B_i.$

Легко видеть, что разбиение $\beta = \{B_1, \ldots, B_N\}$ — измеримое и $\varphi_\beta(x_0) = \omega_0$, т. е. $K(x_0, T \mid \beta) = \log N$. Доказательство закончено.

Отметим, что именно утверждение 2.8 не позволяет ввести понятия $K(x, T)$ — просто (без покрытия) сложности траектории — традиционным энтропийным способом, положив

$$K(x, T) = \sup K(x, T \mid \beta), \text{ где } \sup$$

берется по всем измеримым конечным разбиениям пространства X.

Другой, также энтропийный подход к введению величины $K(x, T)$ для метрических д.с. приведен в [5] (там эта величина обозначается $K^0(x, T)$).

В дальнейшем будем предполагать, что (X, T) — топологическая динамическая система.

Утверждение 2.9. *Если $u=\{U_1, ..., U_l\}$ — конечное открытое покрытие, то для всех $x \in X$*

$$K(x, T \mid u) \leqslant h(T, u).$$

Доказательство. Действительно, пусть $h' > h(T, u)$, тогда существуют $N \in Z^+$ и покрытие $\tilde{\tilde{u}}$ (подпокрытие покрытия u^N) такие, что $\log \operatorname{card}\{\tilde{\tilde{u}}\} < h' \cdot N$. Так как $\tilde{u}$ — покрытие, то найдется $\omega \in \varphi_u(x)$ такое, что для всех $k \in Z^+$

$$U_{\omega(kN)} \cap T^{-1} U_{\omega(kN+1)} \cap \ldots \cap T^{-N+1} U_{\omega(kN+N-1)} \in \tilde{u}.$$

Отсюда в силу леммы 1.8, утверждения 2.5 и свойств сложности получаем

$$K(x, T \mid u) \leqslant \frac{1}{N} \lim_{k \to \infty} \sup \frac{K(\omega^{N \cdot k})}{k} \leqslant \frac{\log \operatorname{card}\{\tilde{u}\}}{N} < h'.$$

Доказательство утверждения 2.9 закончено.

Возвращаясь к случаю разбиения, мы приведем две оценки величины $\sup_{x \in X} K(x, T \mid \mathfrak{A})$, основанные на соответственно топологической и метрической оценках массивности множества

$$W(\mathfrak{A}) = \{x \in \bar{A}_i \cap \bar{A}_j;\ i \neq j\} —$$

границы покрытия $\mathfrak{A}$.

Утверждение 2.10. *Пусть $S_{\mathfrak{A}}$ — динамический аналог индекса покрытия $\mathfrak{A}$, рассмотренный в [4] (там он обозначается просто S). Имеет место оценка*

$$S_{\mathfrak{A}} \geqslant \sup_{x \in X} K(x, T \mid \mathfrak{A}) - h(T).$$

Утверждение 2.11. *Если множество $W(\mathfrak{A})$ — инвариантной меры нуль, то $K(x, T \mid \mathfrak{A}) \leqslant h(T)$.*

Доказательство. В [22] показано, что в условиях утверждения 2.11 существует мера $\nu \in M(X, T)$ такая, что $h(\sigma \mid \Omega_{\bar{\mathfrak{A}}}) = h_\nu(T, \mathfrak{A})$. Но тогда в силу теоремы Динабурга—Гудмана и неравенства $K(\omega) < h(\sigma \mid \Omega)$ имеем

$$K(\omega) \leqslant h(T) \text{ для всех } \omega \in \Omega_{\bar{\mathfrak{A}}}.$$

Однако если $\omega \in \Omega_{\mathfrak{A}}$, то и подавно $\omega \in \Omega_{\bar{\mathfrak{A}}}$, т. е.

$$K(x, T \mid \mathfrak{A}) = K(\varphi_{\mathfrak{A}}(x)) \leqslant h(T).$$

Доказательство закончено.

С помощью утверждения 2.11 можно оценить сложность классических штурмовских траекторий Хедлунда—Морса (см. [26]). Действительно, пусть $X = [0, 1)$ — единичная окружность, преобразование $T: X \to X$ — поворот на угол α (т. е. $x \to x + \alpha$; α — иррационально). Хорошо известно, что такая д.с. является строго эргодической; ее единственная инвариантная мера m — это обычная мера Лебега, причем $h_m(T) = 0$. Далее, обозначим через $\beta = \{B_1, ..., B_k\}$ разбиение, определенное условием $B_i = [r_i, r_{i+1})$, где

$$0 = r_1 < r_2 < \ldots < r_{k+1} = 1.$$

Элементы пространства Ω_β называются штурмовскими траекториями. Поскольку $m(W(\beta)=\{r_0, r_1, \dots, r_{k+1}\})=0$, то из 2.11 получаем

Следствие 2.12. *Для всех* $x \in X$ $K(x, T|\beta)=K(\varphi_\beta(x))=0$, *т. е. сложность штурмовских траекторий равна нулю.*

§ 3. Сложность траекторий топологической динамической системы

В данном параграфе каждой траектории топологической динамической системы будет сопоставлено число $K(x, T)$, характеризующее степень сложности поведения этой траектории в фазовом пространстве системы. При этом выполнены два основных утверждения настоящей работы, а именно

Теорема 3.1. *Если* $\mu \in EM(X, T)$, *то*

$$K(x, T)=h_\mu(T)$$

для μ-*почти всех* $x \in X$.

Теорема 3.2. *Для любой точки* $x \in X$

$$K(x, T) \leqslant h_T(x),$$

где $h_T(x)$ — *энтропия точки* x *в смысле Камае* [24].

1. Определение. *Величину*

$$K(x, T)=\sup_u K(x, T|u),$$

где sup *берется по всем конечным открытым покрытиям пространства* X, *будем называть сложностью траектории точки* x.

Замечание. Хотя данное определение имеет место для произвольных топологических д.с., большинство результатов § 3 получено в предположении, что X — метрический компакт.

Все покрытия, рассматриваемые далее, предполагаются открытыми и конечными.

На мой взгляд является любопытным следующее (не используемое в дальнейшем)

Утверждение 3.3 (доказательство опускаем). *Пусть д.с.* (X, T) *и* (Y, S) *топологически сопряжены*; $\pi: X \to Y$ — *сопрягающий гомеоморфизм и* $\pi(x)=y$. *Тогда*

$$K(x, T)=K(y, S).$$

Из свойств 2.2, 2.4, 2.6 и хорошо известных свойств топологических динамических систем вытекают:

Утверждение 3.4. *Если для семейства покрытий* $\lim_{i\to\infty} d(u_i)=0$, *то*

$$K(x, T)=\sup_{i \in Z^+} K(x, T|u_i).$$

Следствие 3.5. *Если покрытие* u — *топологическая образующая д.с.* (X, T), *то*

$$K(x, T)=K(x, T|u)$$

и, в частности, для символической д.с.

$$K(\omega, \sigma)=K(\omega).$$

Утверждение 3.6. *Для всех* $x \in X$

$$K(x, T) \leqslant h(T).$$

Замечание. Уточняя утверждение 3.6, можно показать, что $K(x, T) \leqslant h(T|\bar{O}(x))$, где $\bar{O}(x)$ — замыкание траектории точки x. Существенно более точная оценка сложности конкретной траектории приведена в теореме 3.2.

Отметим также, что рассмотрение простейших примеров д.с., не обладающих мерой максимальной энтропии, показывает, что может не существовать траекторий максимальной сложности, т. е. не исключено, что $K(x, T) < h(T)$ для всех $x \in X$.

Нашей ближайшей целью будет доказательство теоремы 3.1.

Приведем вспомогательные результаты.

Определение 3.7. *Множество* $A \in \mathfrak{M}$ *назовем* μ*-непрерывным, если* $\mu(\nu A) = 0$, *где через* νA *обозначена граница множества* A.

Покрытие $u = \{U_1, ..., U_k\}$ *назовем* μ*-непрерывным, если* μ*-непрерывны все множества* U_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Лемма 3.8. *Для любого покрытия* u *существует* μ*-непрерывное покрытие* v *такое, что* $v \geqslant u$.

Доказательство. Пусть $\delta(u)$ — константа Лебега покрытия u. Для каждой точки $x \in X$ найдется окрестность $O(x)$ такая, что $d(O(x)) < \delta$ и множество $O(x)$ будет μ-непрерывным. Для покрытия $0 = \{O(x)\}_{x \in X}$ компакта X такими множествами найдется конечное подпокрытие v, которое и является искомым.

Следствие 3.9. *Из свойства 2.2 и леммы 3.8 вытекает, что* $K(x, T) = \sup K(x, T|u)$, *где* sup *берется лишь по* μ*-непрерывным покрытиям* u *компакта* X.

Лемма 3.10. *Для любого покрытия* u *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется покрытие* v *такое, что:*

1. $v \geqslant u$.
2. v *является* μ*-непрерывным.*
3. $\mu(W(v)) < \varepsilon$, *где, как и раньше,*

$$W(v) = \{x \in \bigcup_{i \neq j} \bar{V}_i \cap \bar{V}_j\}.$$

Доказательство. По лемме 3.8 найдется некоторое μ-непрерывное покрытие $v' \geqslant u$. Опишем теперь итерационную процедуру, с помощью которой мы получим искомое покрытие v из v'. Пусть $M = \operatorname{card} v$ (т. е. $v = \{V_1, ..., V_M\}$) и $\varepsilon_0 < \varepsilon / M^2$. На каждом шаге итерации выбираем пару множеств таких, что $\mu(V_i^k \cap V_j^k) > \varepsilon_0$ и строим покрытие $v^{k+1} = \{V_1^{k+1}, \ldots, V_M^{k+1}\}$, где $V_s^{k+1} = V^k$ для $s \neq j$ и $V_j^{k+1} \subseteq V_j^k$, причем:

1) V_j^{k+1} является μ-непрерывным;

2) $\mu(V_i^{k+1} \cap V_j^{k+1}) < \varepsilon_0$.

Очевидно, что так определенный итерационный процесс закончится за конечное число шагов и полученное покрытие v будет искомым.

Опишем шаг итерации. В силу μ-непрерывности множеств $v^k{}_i$ и $v^k{}_j$ существует μ-непрерывное открытое множество O_{ij} такое, что

$$O_{ij} \supseteq \nu(V_i^k \cap V_j^k) \text{ и } \mu(O_{ij}) < \varepsilon_0.$$

Положим

$$V_j^{k+1} = (V_j^k \setminus V_i^k) \cup (O_{ij} \cap V_j^k).$$

Легко видеть, что множество V_j^{k+1} открыто, μ-непрерывно и, кроме того,

$$\mu(V_j^{k+1} \cap V_i^k) \leqslant \mu(O_{i_l}) < \varepsilon_0.$$

Доказательство леммы 3.10 закончено.

В дальнейшем для покрытия $u=\{U_1, ..., U_M\}$ будем обозначать через $\beta(u)$ разбиение компакта X на множества B_i $(1 \leqslant i \leqslant M)$, положив по определению:

$$B_1 = U_1;$$
$$B_2 = U_2 \setminus U_1;$$
$$\vdots$$
$$B_M = U_M \setminus \bigcup_{i=1}^{M-1} U_i.$$

Лемма 3.11 (очевидная). *Если покрытие u является μ-непрерывным, то тем же свойством обладают покрытия:*

$$\beta(u),\ T^{-1}(u),\ u^N,\ \beta^n(u).$$

Нам понадобится приведенная ниже стандартная конструкция теории динамических систем.

Каждой точке $x \in X$ и числу $n \in Z^+$ сопоставим меру $\mu_{x,n}$, положив по определению

$$\mu_{x,n} = \frac{1}{n}(\delta_x + \delta_{Tx} + \ldots + \delta_{T^{n-1}x}),$$

где δ_x — мера, сконцентрированная в точке x.

Хорошо известно (см. [12, 20]), что для любого $x \in X$ множество $V_T(x)$ — предельное в слабой топологии для семейства мер $\{\mu_{x,n}\}_{n \in Z^+}$ — обладает двумя свойствами, а именно:

1) $V_T(x) \neq \varnothing$;

2) $V_T(x) \subseteq M(X, T)$.

Эргодическим разложением динамической системы (X, T) называется представление X в следующем виде:

$$X = \bigcup_{\mu \in EM(x,T)} M_\mu \cup N, \text{ где}$$

1) $x \in M_\mu \Leftrightarrow V_T(x) = \{\mu\}$,

2) $\mu(M_\mu) = 1$ для любого $\mu \in EM(X, T)$,

3) множество N — инвариантной меры нуль.

В следующих двух леммах устанавливается связь между понятием μ-непрерывности множества и разложением пространства X на эргодические множества. Первая из них хорошо известна.

Лемма 3.12. *Если последовательность мер μ_i сходится (в слабой топологии) к мере μ ($\mu_i \Rightarrow \mu$), то для всякого μ-непрерывного множества B имеет место равенство:*

$$\lim_{i \to \infty} \mu_i(B) = \mu(B).$$

Лемма 3.13. *Пусть* $\mu \in EM(X, T)$, $\overline{\mu}$ — *ее верхняя мера, множество* B μ*-непрерывно и* $\mu(B) < \tau$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует целое* L *такое, что множество*

$$P_L = \{x : \mu_{x,l}(B) < \tau \text{ при } l > L\}$$

удовлетворяет условию $\mu P_L > 1 - \varepsilon$.

Доказательство. Действительно, для всех $x \in M_\mu$ в силу леммы 3.12 имеем:

$$\lim_{l \to \infty} \mu_{x,l}(B) = \mu(B).$$

Таким образом, для каждого $x \in M_\mu$ существует $L(x)$ такое, что

$$\mu_{x,l}(B) < \tau \text{ при } l > L(x).$$

Обозначим $P_k = \{x : x \in M_\mu \text{ и } L(x) < k\}$, тогда

$$P_1 \subseteq P_2 \subseteq \ldots \text{ и } \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = M_\mu.$$

Теперь существование числа L с искомыми свойствами вытекает из известной теоремы теории меры.

Доказательство и роль леммы 3.14 аналогично доказательству и месту лемм 1.4 и 1.5 в § 1.

Лемма 3.14. *Множества* $X_{t,u} = \{x : K(x, T \mid u) < t\}$ *инвариантны и измеримы при всех* $t \in R^+$.

Лемма 3.15. *Пусть* $\mu \in EM(X, T)$. *Для* μ*-почти всех* $x \in X$

$$K(x, T) \geqslant h_\mu(T).$$

Доказательство. Действительно пусть существует $h' < h_\mu(T)$ такое, что $\mu(X_{h'} = \{x : K(x, T) < h'\}) \neq 0$. Следовательно, для любого покрытия u и $\varepsilon > 0$ рассуждениями, аналогичными доказательству леммы 1.10, получаем существование числа $k_0 \in Z^+$ такого, что $\mu(Z_{k_0,h'}) > 1 - \varepsilon$, где

$$Z_{k_0,h'} = \{x: \min_{\omega^k \in \{(\psi_u(x))^k\}} K(\omega^k) < k \cdot h' \text{ для } k > k_0\}.$$

Для каждого $k \in Z^+$ определим отображение $\psi_{u,k} : X \to \Omega_u^k$ следующим образом:

$$\omega_0^k \in \psi_{u,k}(x) \Leftrightarrow \omega_0^k \in \Omega_u^k u K(\omega_0^k) = \min_{\omega \in \{\psi_u(x)\}} K(\omega^k).$$

Заметим, что для каждого фиксированного $k > k_0$

$$\operatorname{card}\{\psi_{u,k}(Z_{k,h'})\} < 2^{kh'+1}. \tag{1}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что:

1) покрытие u является μ-непрерывным,
2) $\mu(W(u)) < \tau$ ($\tau > 0$, произвольно),
3) $h_\mu(T, \beta(u)) > h' + \varepsilon$ ($h' + \varepsilon < h_\mu(T)$).

Тогда по лемме 3.13 существует L такое, что $\mu P_L > 1 - \varepsilon$. Наконец, пусть в силу следствия теоремы Шеннона—Макмиллана—Бреймана

$$\Omega_{\beta(u)} = A_n \cup B_n \text{ и при } n > N(\varepsilon):$$

1) $\mu(B_n) > 1-\varepsilon$,

2) $\mu(C(\omega^n)) \geqslant 2^{-n(h_\mu(T,\beta(u))+\varepsilon)}$ для $\omega \in B_n$.

При этом, конечно,

$$\operatorname{card}\{\omega : \omega \in B_n\} \leqslant 2^{n(h_\mu(T,\beta(u))+\varepsilon)}.$$

Положим $S_h = Z_{n\,h'} \cap P_n \cap \varphi^{-1}_{\beta(u)}(B_n)$.

Для $n>R=\max(k_0, L, N(\varepsilon))$ имеем $\bar{\mu}(S_n)>1-3\varepsilon$. Так как $S_n \in Z_{n,h'}$, то при $n>R$

$$\operatorname{card}\{\Phi_{u,n} = \{\psi_{u,n}(x) : x \in S_n\}\} \leqslant 2^{nh'+1}. \tag{2}$$

С другой стороны, если $x \in S_n$, то $x \in \varphi^{-1}_{\beta(u)}(B_n)$ и для $n>R$

$$\operatorname{card}\{(\varphi_{\beta(u)}(x))^n : x \in S_n\} \geqslant (1-3\varepsilon)\cdot 2^{n(h_\mu(T,\beta(u))-\varepsilon)}. \tag{3}$$

Положим $\Theta_u(x,n) = \operatorname{card}\{(\varphi_u(x))^n\}$; тогда из (3) получаем:

$$\sum_{x \in S_n} \Theta_{\beta(u)}(x,n) \geqslant (1-3\varepsilon)\cdot 2^{n(h_\mu(T,\beta(u))-\varepsilon)}.$$

С другой стороны, из (2)

$$\sum_{x \in S_n} \Theta_{\beta(u)}(x,n) = \sum_{\omega^n \in \Phi_{u,n}} \sum_{\substack{x \in \psi^{-1}_{u,n}(\omega^n) \\ x \in S_n}} \Theta_{\beta(u)}(x,n) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{nh'+1} \cdot \max_{\omega^n \in \Phi_{u,n}} \sum_{\substack{x \in \psi^{-1}_{u,n}(\omega^n) \\ x \in S_n}} \Theta_{\beta(u)}(x,n).$$

Таким образом, для каждого $n>R$ существует $\omega^n \in \Phi_{u,n}$ такое, что

$$G(\omega^n) = \sum_{\substack{x \in \psi^{-1}_{u,n}(\omega^n) \\ x \in S_n}} \Theta_{\beta(u)}(x,n) \geqslant (1-3\varepsilon)\cdot 2^{n(h_\mu(T,\beta(u))-\varepsilon-h')-1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\max G(\omega^n))}{n} \geqslant h_\mu(T,\beta(u)) - \varepsilon - h' > 0. \tag{4}$$

Однако, если $n>R$, $x \in S_n$ и, кроме того,

$$\omega^n \in \{\psi_{u,n}(x)\}, \text{ а } \tilde{\omega}^n = \{(\varphi_{\beta(u)}(x))^n\},$$

то слова

$$\omega^n = \omega(0)\ldots\omega(n-1) \text{ и } \tilde{\omega}_n = \tilde{\omega}(0)\ldots\tilde{\omega}(n-1)$$

могут различаться не более чем на $n\tau$ местах, так как $x \in P_n$.

Следовательно, для любого $\omega^n \in \Phi_{u,n}$

$$G(\omega^n) = \sum_{\substack{x \in \psi^{-1}_{u,n}(\omega^n) \\ x \in S_n}} \Theta_{\beta(u)}(x,n) \leqslant \binom{n}{n\tau} \cdot M^{n\tau};$$

в этой формуле $M=\operatorname{card} u$. Применяя формулу Стирлинга, получаем для достаточно больших n

$$\frac{\log G(\omega^n)}{n} \leqslant \tau\left(\log\frac{1-\tau}{\tau} + \log M\right) + o(1) \tag{5}$$

также для любого $\omega^n \in \Phi_{u,n}$.

Но поскольку

$$\lim_{\tau\to 0} \tau\left(\log\frac{1-\tau}{\tau} + \log M\right) = 0,$$

то (5) противоречит (4). Доказательство леммы 3.15 закончено.

Лемма 3.16. *Пусть* $\mu \in EM(X, T)$, *тогда*

$$K(x, T) \leqslant h_\mu(T)$$

для μ-*почти всех* $x \in X$.

Доказательство. Пусть $\{u_i\}_{i\in Z^+}$ — счетное семейство покрытий и $\lim\limits_{i\to\infty} d(u_i) = 0$. Тогда для всех $x \in X$ в силу свойств 3.4 и 2.5

$$K(x, T) = \sup_{i\in Z^+} K(x, T \mid u_i) \leqslant \sup_{i\in Z^+} K(x, T \mid \beta(u_i))$$

и, значит, для μ-почти всех $x \in X$ по лемме 2.6

$$K(x, T) \leqslant \sup_{i\in Z^+} h_\mu(T, \beta(u_i)) \leqslant h_\mu(T).$$

Доказательство закончено.

Теорема 3.1 непосредственно вытекает из лемм 3.15 и 3.16.

Самостоятельный интерес представляет

Утверждение 3.17. *Разбиение пространства X на множества уровней функции $K(x, T)$ является измеримым и инвариантным.*

Доказательство. Для семейства покрытий $\{u_i\}_{i\in Z^+}$ $(\lim\limits_{i\to\infty} d(u_i) = 0)$ обозначим

$$\overline{R}^t_{k,i} = \{x : K(x, T \mid u_i) \geqslant t - 1/k\},$$

$$\underline{R}^t_{k,i} = \{x : K(x, T \mid u_i) \leqslant t + 1/k\}.$$

В силу леммы 3.14 множества $\overline{R}^t_{k,i}$ и $\underline{R}^t_{k,i}$ инвариантны и измеримы. Следовательно, этими свойствами обладают и множества

$$\overline{R}^t = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{R}^t_{k,i} \quad \text{и} \quad \underline{R}^t = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} \underline{R}^t_{k,i},$$

а $\overline{\overline{X}}_t = \{x : K(x, T) = t\} = \overline{R}^t \cap \underline{R}^t$ и, значит, тоже инвариантно и измеримо. Доказательство закончено.

Замечание. Далее в утверждении 3.20 устанавливается связь разложения пространства $\overline{\overline{X}}$ на множества X_t с эргодическим разложением д.с. (X, T).

2. Перейдем к оценке сложности конкретной траектории.

Определение 3.18. (Т. Камае [24]). *Число*

$$h_T(x) = \sup_{\mu\in V_T(x)} h_\mu(T)$$

назовем энтропией точки x; если $h_T(x)=0$, то точку x назовем детерминированной.

Теорема 3.2. *Для любой точки $x \in X$*

$$K(x, T) \leqslant h_T(x).$$

Доказательство. Предположим противное: пусть существуют $x_0 \in X$ и h' такие, что

$$K(x_0, T) > h' > h_T(x).$$

Тогда нетрудно доказать, что найдутся: покрытие u, последовательность $\{n_k\}$ $(\lim\limits_{k\to\infty} n_k=\infty)$ и мера $\mu_0 \in V_T(x_0)$ такие, что одновременно выполнены следующие утверждения:

1) $\lim\limits_{n_k\to\infty} \sup (1/n_k) \min\limits_{\omega^{n_k} \in \{(\psi_u(x_0))^{n_k}\}} K(\omega^{n_k}) > h'$;

2) $\mu_{x_0,n_k} \Rightarrow \mu_0$;

3) покрытие u является μ_0-непрерывным;

4) последовательность $\{n_k\}$ специального вида, а именно $n_k=t_k \cdot k_0$, где $t_k \in Z^+$, а k_0 таково, что $H_{\mu_0}(\beta^{k_0}(u)) < k_0 \cdot h'$.

Из 1) вытекает, что

$$\lim_{n_k\to\infty} \frac{K((\varphi_{\beta(u)}(x_0))^{n_k})}{n_k} > h', \tag{1}$$

где $\beta(u)$, как и ранее, обозначает разбиение, получаемое из покрытия u.

С другой стороны, если положить

$$p_B^{r,k}(x_0, n) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n-r}{k}\right]} \chi_B(T^{ik+r})}{[n/\kappa]},$$

то из 2) и 3) в силу леммы 3.12 для любого $B \in \beta^{k_0}(u)$ получаем

$$\lim_{n_k\to\infty} p_B^{0,1}(x_0, n_k) = \mu_0(B). \tag{2}$$

А так как для всех n_k нашего вида

$$\frac{1}{\kappa_0} \sum_{r=0}^{k_0-1} p_B^{r,k_0}(x_0, n_k) = p_B^{0,1}(x_0, n_k), \tag{3}$$

то в силу непрерывности и выпуклости энтропии, а также соотношений (2) и (3) заключаем, что для любого достаточно большого n_k найдется $r=r(n_k)$ такое, что

$$-\sum_{B \in \beta^{k_0}(u)} p_B^{r,k_0}(x_0, n_k) \log p_B^{r,k_0}(x_0, n_k) \leqslant$$

$$\leqslant \left(h' \cdot \frac{n_k}{\kappa_0}\right) k_0 + o(n_k) \leqslant h' \cdot n_k + o(n_k).$$

Но тогда при тех же n_k для функции частотной кодировки A^*, построенной при доказательстве теоремы 3.1, получаем:

$$\limsup_{n_k\to\infty} \frac{K_{A^*}((\varphi_{\beta(u)}(x_0))^{n_k})}{n_k} \leqslant h',$$

что противоречит (1). Доказательство закончено.

Следствие 3.19.

а). *Если* $x \in M_\mu$, *то* $K(x, T) \leqslant h_\mu(T)$.

б). *Если* x — *детерминированная, то* $K(x, T) = 0$.

Замечания.

1. Неравенство в теореме 3.2 может быть строгим (см. § 4, пример 4.3.2).

2. Оценка величины $K(x, T)$, полученная в теореме 3.2, точнее оценки утверждения 3.6, поскольку в силу теоремы Динабурга—Гудмана $h_T(x) \leqslant h(T|\bar{O}(x))$; последнее неравенство также может быть строгим (см. § 4, пример 4.2.2).

В заключение данного параграфа отметим, что теоремы 3.1 и 3.2 указывают на существование тесной связи между разложением пространства уровней функции $K(x, T)$ и классическим разложением д.с. на эргодические множества.

Утверждение 3.20. *Пусть*

$$W_t = \{\bigcup_{\mu\in EM(X,T)} M_\mu : h_\mu(T) \leqslant t\},\quad \overset{\vee}{X}_t = \{x : K(x, T) \leqslant t\};$$

тогда $\overset{\vee}{X}_t \supseteq W_t$, *причем множество* $\overset{\vee}{X}_t \setminus W_t$ — *инвариантной меры нуль (но, возможно, не пусто — см. пример 4.3.2).*

§ 4. О различных подходах к определению понятия типичной (сложной, случайной) траектории

Представляется несомненным, что в настоящее время многие исследователи, работающие в самых различных разделах теории динамических систем, столкнулись с «сложностными» вопросами. Однако естественно возникшее разнообразие сложностных характеристик при отсутствии универсальной меры сложности затрудняет обмен идеями и результатами между различными аспектами теории динамических систем.

В настоящем параграфе автор поставил себе целью собрать вместе и дать по возможности единообразный анализ некоторых «сложностных» характеристик теории динамических систем. Как и раньше, мы не будем делать различия между понятиями точки, траектории и последовательности там, где это не приводит к недоразумению.

Первым вопрос о типичности траектории рассмотрел А. Пуанкаре. Выделенное им множество блуждающих точек оказалось множеством первой категории и инвариантной меры нуль. После появления работ Биркгофа, Крылова и Боголюбова наметился подход, заключающийся в том, что исследование тех или иных свойств типичности траектории для динамической системы общего вида сводится к анализу аналогичных характеристик для минимальных (топологическая типичность) или одноэргодических (типичность в смысле меры) динамических систем. Динамическая система, обладающая обоими этими свойствами, называется строго эргодической *.

* В терминологии мы следуем [20]; в [12] она несколько иная.

4.1. Минимальность, одноэргодичность и топологическая энтропия

4.1.1. Все траектории минимальной системы являются рекуррентными в смысле Биркгофа (почти-периодическими). Минимальная система может не быть одноэргодической. Фюрстенберг [21] построил пример минимальной системы с $h(T)>0$.

4.1.2. В рамках комбинаторного подхода к задачам эргодической теории многими авторами (см. [17] и ссылки в [8]) были указаны конструктивные примеры минимальных или строго эргодических систем. Окончательный результат, принадлежащий Грилленбергу [23], следующий: для любого числа $h<\log N$ существует конструктивно описываемая последовательность $\omega\in\Lambda_N$ такая, что д.с. $(\bar{O}(\omega), \sigma)$ — строго эргодическая и $h(\sigma|\bar{O}(\omega))=h$.

4.2. Регулярность, энтропия точки по Камае, комбинаторная энтропия траектории

4.2.1. В случае динамической системы общего вида аналогом понятия одноэргодичности является понятие μ-регулярности. По определению точка x называется μ-регулярной, если $V_T(x)=\{\mu\}$. Конечно, $h_T(x)=h_\mu(T)$ для всякой μ-регулярной точки x. Для эргодической меры Боуэн [19] показал *, что $h(T|M_\mu)=h_\mu(T)$.

4.2.2. В силу теоремы Динабурга—Гудмана

$$h_T(x)\leqslant h(T|\bar{O}(x));$$

тем самым энтропия Камае не превосходит комбинаторную энтропию.

Пример последовательности

$$\omega_0=p_0\,0\,p_1\,00\,p_2\,000\ldots p_k\underbrace{00\ldots0}_{2^k},$$

где p_k — k-е двоичное слово дает нам пример точки символической д.с. (Λ_2, σ), для которой это неравенство является строгим. Действительно, нетрудно проверить, что $h_\sigma(\omega)=0$. С другой стороны $\bar{O}(\omega_0)=\Lambda_2$ и, значит, $h(\sigma|\bar{O}(\omega_0))=\log 2$.

Заодно мы получили пример траектории квазислучайной по Алексееву [1] и тем не менее детерминированной.

Для любой траектории строго эргодической д.с.

$$h(T|\bar{O}(x))=h_T(x)=h(T).$$

В заключение отметим, что понятие μ-регулярной точки впервые появилось и плодотворно используется в теории чисел. Эргодическую трактовку ряда задач аналитической теории чисел можно найти в монографии А. Г. Постникова [13].

4.3. Алгоритмическая сложность траектории

4.3.1. В силу замечания к утверждению 3.6

$$K(x, T)\leqslant h(T|\bar{O}(x))$$

для любого $x\in X$, т. е. сложность траектории не превышает ее комбинаторную энтропию; это неравенство может быть строгим (см. далее

* Здесь величина $h(T|M_\mu)$ понимается в смысле [19].

пример в 4.3.2). Таким образом, если д.с. не является «квазислучайной» в смысле Алексеева (т. е. если $h(T)=0$), то сложность каждой траектории равна нулю.

В заключение отметим, что в случае символической динамической системы сложность и комбинаторная энтропия связаны соотношением (А. А. Брудно, см. [1, теорема 5.4])

$$h(\sigma \mid \bar{O}(\omega)) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\in Z^+} (1/n) K((\sigma^k\omega)^n).$$

4.3.2. По теореме 3.2 сложность μ-регулярной траектории не превышает энтропию по мере μ, т. е. $K(x, T) \leqslant h_\mu(T)$. Покажем, что это неравенство может быть строгим. Действительно, пусть

$$\omega_1 = 0.1.01.\,10.\,11.\,000.\,\ldots,$$

т. е. подряд выписаны все конечные двоичные слова. Хорошо известно, что $\omega_1 \in M_m$. Здесь m — равномерная бернуллиева мера, значит, $h_\sigma(\omega_1) = \log 2$. С другой стороны, не составляет труда построить вычислимую функцию A_0, восстанавливающую по числу n двоичное слово ω_1. Получаем:

$$K(\omega_1) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{K_{A_0}(\omega_1^n)}{n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0.$$

Таким образом, существуют недетерминированные по Камае траектории с нулевой сложностью, и множество $\overset{\vee}{X}_t \setminus W_t$ из утверждения 3.20 может быть не пусто.

4.3.3. Имеет место и более сильный результат. Поскольку построение последовательности ω в уже упоминавшемся примере Гриллленберга является конструктивным, то $K(\omega)=0$. В силу произвольности в выборе числа h в этом примере мы видим, что траектория может быть не типичной, в смысле сложности, даже для ею же порожденной строго эргодической системы, и что функция $K(x, T)$ не обязана быть константой на такой системе.

Целесообразно ввести следующее

Определение. *Точку $x \in X$ назовем μ-сложной, если*

$$\mu \in V_T(x) \text{ и } K(x, T) = h_\mu(T).$$

4.4. Сложность и случайность

4.4.1. Здесь мы рассмотрим связь понятия сложности траектории, введенного в 4.3.2, с понятием случайности в смысле Мартин-Лефа, общепринятым в настоящее время. Коротко остановимся на определении этого понятия (рассматривая для простоты пространство Λ_N).

Тестом называется семейство множеств $c = \{C_i\}_{i\in Z^+}$, конструктивно описываемых и удовлетворяющих условиям:

1) $C_0 \supset C_1 \supset \ldots$;
2) каждое C_i — секвенциально и открыто;
3) $\mu(C_i) \leqslant 2^{-i}$ для каждого $i \in Z^+$.

Множество $R_c = \bigcap_{i\in Z^+} C_i$ по определению состоит из последовательностей, не выдержавших тест c. В [25] Мартин-Леф показал существование универсального теста c_0 такого, что $R_c \subseteq R_{c_0}$ для любого теста c. Последовательности $\omega \notin R$ предложено называть μ-случайными.

В [11] показано, что при некоторых естественных допущениях для случайных в этом смысле последовательностей выполнены все теоретико-вероятностные законы. Поэтому равенство $K(\omega)=h_\mu(\sigma)$ является (в силу теоремы 3.1) необходимым условием случайности ω по мере μ. Покажем, что это условие не является достаточным. Пусть m — равномерная бернуллиева мера в Λ_2, точка ω_0 — m-сложная и m-случайная. Определим последовательность $\widetilde{\omega}=\{\widetilde{\omega}(i)\}_{i\in Z^+}$ следующим образом:

$$\widehat{\omega}_0(i) = \begin{cases} 0, \text{ если } i = 2^k \, (k = 0, 1, 2, \ldots) \\ \omega_0(i) \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно $V_\sigma(\widetilde{\omega}_0)=V_\sigma(\omega_0)$. Кроме того, пусть $A'=A'(p)$ — ас. опт. ф., значения которой на словах $p=\bar{p}_1p_2$ получаются последовательным вставлением букв слова p_1 в слово $A(p_2)$ на места с номерами 2^i $(i=1, 2, \ldots, l(p_1))$. Тогда для всех n

$$K_{A'}(\omega_0^n) \leqslant K_{A'}(\widetilde{\omega}_0^n) + 2 + 2\log n.$$

Значит,

$$K(\widetilde{\omega}_0) \geqslant K(\omega_0) = \log 2, \text{ т. е. } K(\widetilde{\omega}_0) = \log 2.$$

Таким образом, $\widetilde{\omega}_0$ также является m-сложной. Однако нетрудно проверить, что семейство множеств

$$c = \{C_i\}_{i\in Z^+}, \text{ где}$$

$$C_i = \{\omega \in \Lambda_2 : \omega(2^k) = 0 \text{ для } k = 0, 1, \ldots, i-1\},$$

является тестом. Поскольку последовательность $\widetilde{\omega}_0 \in R_c$, она не может быть m-случайной.

Заключение

В отличие от предыдущего материала в заключении не содержится математически строгих результатов. Его цель — на интуитивном уровне изложить попытку автора найти общий подход к рассмотрению различных характеристик динамической системы, в той или иной мере связанных с вопросами сложности. Приведенные ниже соображения, которые могут показаться спорными, позволяют рассматривать все результаты настоящей работы как единое целое, связывающее теорию алгоритмов с теорией динамических систем.

Основным связующим звеном является следующий

Тезис. Всякая энтропийная характеристика динамической системы есть некоторая алгоритмическая функция, осуществляющая кодирование конечного отрезка траектории динамической системы в двоичное слово. При этом численным выражением этой характеристики является асимптотика количества информации (измеряемого в бит/символ), необходимого для восстановления с помощью той же функции любой траектории среди того или иного класса траекторий.

Приведем некоторые соображения в пользу этого тезиса (ограничиваясь, что не очень существенно, случаем символической системы).

В утверждении 1.12 приведена функция, построенная еще Шенноном, которая осуществляет кодирование μ-почти любой достаточно длинной траектории за $h_\mu(\sigma)$ бит/символ. При этом ограничение —

«почти любой» — естественно возникает из-за нечувствительности метрической энтропии к поведению системы на множестве меры нуль. Второе требование — на длину траектории — неизбежное следствие всякого алгоритмического подхода, поскольку при фиксированных длинах надо учитывать слишком много частностей, не сказывающихся на асимптотическом поведении.

В общем случае (без ограничения на меру), содержащемся в утверждении 1.12, тот же результат получается, если воспользоваться функцией частотной кодировки A^*, построенной в лемме 1.9.

Таким образом, $h_\mu(\sigma)$ — бит/символ — количество информации, необходимое и достаточное для восстановления по функции A^* почти любой траектории д.с. (Ω, σ).

Обратимся теперь к топологической энтропии. Вычислимая функция (мы ее будем обозначать — A^T), построенная при доказательстве леммы 2 работы [3], позволяет, в свою очередь, утверждать, что количество информации, необходимое и достаточное для восстановления любой траектории системы по функции A^T — $h(T)$ бит/символ.

Понятно, что в случае энтропийных характеристик индивидуальных траекторий нужно восстанавливать лишь саму эту траекторию. Можно сказать, что несложная модификация A^* приведет нас к энтропии точки по Камае (как это, например, делается при доказательстве теоремы 3.2), а комбинаторная энтропия траектории получается при некоторой трансформации функции A^T.

Наконец, по самому определению алгоритмической сложности траектории соответствует асимптотически оптимальная функция, Шнорр в [16] показал, как, следуя этой идее и не усредняя по длине траектории, получать последовательности, случайные по Мартин-Лефу.

Теперь мы можем объяснить природу примеров 4.2.2, 4.3.2 и 4.4.4. Первый из них является примером всюду плотной траектории с патологическими статистическими свойствами. Поэтому эта траектория, типичная для функции A^T и, следовательно, квазислучайная, тривиальна с точки зрения функции A^* и, значит, детерминированная (поскольку $h_\sigma(\omega_0)=0$).

Последовательность ω_1 из примера 4.3.2 по своим статистическим свойствам ничем не отличается от других регулярных последовательностей, поэтому $h_\sigma(\omega_1)=\log 2$ (недетерминированность). Однако она описывается, если знать двоичную арифметику, и поэтому ее сложность относительно асимптотически оптимальной функции равна нулю. В примере 4.4.2 показано, что усреднение по длине траектории, не влияющее на μ-сложность траектории, может сказаться на ее принадлежности к множеству μ-случайных траекторий.

Поступило 1.XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В. М. Символическая динамика.— Труды XI летней математической школы. Институт математики АН УССР. Киев, 1976.
2. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1963.
3. Брудно А. А. Топологическая энтропия и сложность по А. Н. Колмогорову.— УМН, 1974, **29**, № 6, 157—158.
4. Брудно А. А. Символическая динамика и энтропия.— УМН, 1977, **32**, № 3, 180.
5. Брудно А. А. О сложности траекторий динамической системы.— УМН, 1978, **76**, № 1, 207—208.
6. Динабург Е. И. Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем.— АН СССР. Сер. матем., 1971, **35**, № 2, 324—366.

7. Звонкин Л. К., Левин Л. А. Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов. — УМН, 1970, **25**, № 6, 85—127.
8. Каток А. Б., Синай Я. Г., Степин А. М. Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой.— В кн.: Математический анализ, т. 13. М.: 1967, 129—262.
9. Колмогоров А. Н. Новый метрический инвариант транзитивных автоморфизмов пространства Лебега.— ДАН СССР, 1958, **119**, № 5, 861—864.
10. Колмогоров А. Н. Три подхода к определению понятия «количества информации».— Проблемы передачи информации, 1965, **5**, № 3, 3—7.
11. Левин Л. А. Законы сохранения (невозрастания информации) и вопросы обоснования теории вероятностей.— Проблемы передачи информации, 1976, **74**, № 3, 30—35.
12. Окстоби Д. Эргодические множества.— УМН, 1953, **8**, № 3, 75—97.
13. Постников А. Г. Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений.— Труды МИАН, т. 82. М.: 1966.
14. Рохлин В. А. Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой.— УМН, 1967, **22**, № 5, 3—56.
15. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963.
16. Шнорр К. П. Единый подход к определению случайных последовательностей.— В кн.: Сложность вычислений и алгоритмов. М.: Мир, 1974, 370—387.
17. Якобс К. Машинно-порожденные 0—1 последовательности.— В кн.: Машины Тьюринга и рекурсивные функции. М.: Мир, 1972, 216—247.
18. Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H. Topological Entropy.— T. A. M. S., 1967, **114**, N 2, 309—319.
19. Bowen R. Topological entropy for noncompact sets.— T. A. M. S., 1973, v. 184, 125—136.
20. Denker M., Grillenberger C., Sigmund K. Ergodic Theory on Compact Sets.— Lecture Notes in Mathematics, **527**, 1976.
21. Furstenberg H. Disjointness in ergodic theory minimal sets and a problem in diophantic approximation.— Math. Syst. Theory, 1967, **1**, 1—49.
22. Goodwin L. W. Comparing topological entropy with measure theoretic entropy.— Amer. J. Math., **94**, N 2 (1972), 366—388.
23. Grillenberger C. Constructions of strictly ergodic systems, I. Given entropy.— Z. Wahrscheinlichkeits — theory und verw. Gebr., 1973, **25**, N 4, 323—334.
24. Kamae T. Normal Numbers and Ergodic Theory.— Lectures Notes in Mathematics, **550**, 1976.
25. Martin-Löff M. The definition random sequences.— Information and Control, 1966, **9**, 619—682.
26. Morse M., Hedlund G. A. Symbolic dynamics II, sturmian traejectures.— Amer. J. Math., 1940, **62**, N 1, 1—42.